

Probabilités et Applications

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Mohamed ASSELLAOU

2023/2024 - INPT

Introduction

- Les probabilités permettent d'étudier des phénomènes aléatoires.
- La paternité des probabilités est attribuée à Pascal qui a exposé le problème des parties en 1654.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- L'objectif du cours est d'apprendre les connaissance de base en probabilités comme porte d'entrée du monde des statistiques et Data Science.
- Le cours sera orienté vers des applications.

Problème des parties

- Deux joueurs jouent aux jeux du hasard. Ils misent chacun 32 unités. Pour gagner, il faut gagner 3 parties.
- Si après 3 parties, le résultat est 2 pour le 1er et 1 pour le 2ème. Les issues de la 4ème partie : 3-1 ou 2-2. S'ils décident d'abandonner, le gain du 1er est $32 + 32 \cdot 0.5 = 48$ et pour le 2ème est $32 \cdot 0.5 = 16$.
- Si après 2 parties, le résultat est 2 pour le 1er et 0 pour le 2ème. Les issues de la 3ème partie : 3-0 ou 2-1. S'ils décident d'abandonner, le gain du 1er est $48 + 16 \cdot 0.5 = 56$ et pour le 2ème est $16 \cdot 0.5 = 8$
- Si après une partie, le résultat est 1 pour le 1er et 0 pour le 2ème. Les issues de la 2ème partie : 2-0 ou 1-1. S'ils décident d'abandonner, le gain du 1er est $32 + (56 - 32) \cdot 0.5 = 44$ et pour le 2ème est $8 + (56 - 32) \cdot 0.5 = 20$

Expérience aléatoire, univers

Définition (Expérience aléatoire, univers)

- *On appelle expérience aléatoire une expérience sur un système dont le résultat n'est pas connu d'avance et peut varier si on répète cette expérience.* Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- *On appelle univers (espace échantillon) l'ensemble des résultats possibles. Il est noté Ω .*

Exemple : [Jeter une pièce de monnaie, (P, F)], [lancer des dés, (1;6)], prélever des boules dans une urne multicolore (bleu, vert, rouge).

Evènement, Terminologie

Définition (Evènement)

Un sous ensemble de Ω est appelé évènement. On note par $\mathcal{A}$ l'ensemble des évènements relatifs à l'expérience aléatoire.

Terminologie probabiliste:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Evènement impossible	: $\emptyset$
Evènement contraire à A	: $\bar{A}$
A ou B	: $A \cup B$
A et B	: $A \cap B$
A implique B	: $A \subset B$
A et B incompatibles	: $A \cap B = \emptyset$

Propriétés des évènements

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELAOUI

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Expérience aléatoire, univers

Définition (Partition)

Une partition de l'univers est un ensemble de n évènements $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ qui sont incompatibles deux à deux et dont l'union est l'univers, i.e:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i &= \Omega \\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j &= \emptyset, \quad \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

Exercice: Quel est le nombre de partitions dans un ensemble de 3 ou 4 évènements?

Définition (Tribu, Espace Probabilisable)

Une tribu $\mathcal{C}$ est un espace d'évènements qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\{\Omega, \emptyset\} \subset \mathcal{C} \quad (1)$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\forall A \in \mathcal{C}, \quad \bar{A} \in \mathcal{C} \quad (2)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{C}, \quad \bigcup_i A_i \in \mathcal{C} \quad (3)$$

L'espace probabilisable n'est autre que le couple $(\Omega, \mathcal{C})$.

Exemples: $\{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu. L'ensemble de toutes les parties de Ω est également une tribu.

Notion de probabilité

Définition (Probabilité)

A chaque évènement A un poids $P(A)$ indiquant sa chance d'être réalisé si l'on effectue l'expérience aléatoire.

Définition (Probabilité (Formulation mathématique))

Étant donné un espace probabilisable $(\Omega; \mathcal{A})$, on appelle probabilité sur $(\Omega; \mathcal{A})$ toute application $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant aux trois propriétés suivantes:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI.

- $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Pour toute suite (A_n) d'éléments deux à deux disjoints,

$$P(\cup_n A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Notion de probabilité

- Cas d'équiprobabilité: (Ω fini de cardinal n .)

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{n} \quad (4)$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- La relation (4) est fausse dans le cas général.
- **Exercice** : Soient A et B deux évènements. Montrer les relations suivantes:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Notion de probabilité

Proposition

Toute probabilité P possède les propriétés suivantes:

- 1 $P(\emptyset) = 0$
- 2 $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- 3 *Formule de crible de Poincaré:* $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n,$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\begin{aligned}
 P(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
 &+ \dots \\
 &+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\
 &+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)
 \end{aligned}$$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit B un évènement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle à B , ou probabilité sachant B , associée à P l'application:

$$P_B : \begin{cases} A \rightarrow \mathbb{R} \\ A \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

On la note aussi $P(A/B)$.

⇒ La probabilité conditionnelle P_B est une probabilité satisfaisant aux trois propriétés déjà mentionnée.

⇒ Formule de probabilité enchainée:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1/A_2 \cap \dots \cap A_n)P(A_2/A_3 \cap \dots \cap A_n) \\ \dots P(A_{n-1}/A_n)P(A_n)$$

Probabilité conditionnelle

Exemples: On jète deux fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'avoir "pile" si un des deux résultats est "face".

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Formule de probabilité totale, Formule de Bayes

Définition

Soit $(B_k)_{1 \leq k \leq N}$ une partition de Ω telle que $\forall k, P(B_k) \geq 0$. Alors on a la formule de probabilité totale suivante:

$$\forall A, P(A) = \sum_{1 \leq k \leq N} P(A \cap B_k) = \sum_{1 \leq k \leq N} P(A/B_k)P(B_k)$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

⇒ Système complet $\{A_1; \bar{A}_1\}$, la formule de probabilité totale:

$$P(A) = P(A/A_1)P(A_1) + P(A/\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)$$

⇒ Formule de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Exercice

- **Exemple 1:** On considère une urne U_1 contenant deux boules blanches et une boule noire, et une urne U_2 contenant une boule blanche et une boule noire. On choisit une urne au hasard puis on prélève une boule dans cette urne. Les boules sont indiscernables au toucher.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author. Dr. Mohamed ASSELLAOUI
 - 1 Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?
 - 2 Si la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la boule soit extraite de l'urne U_1 ?

Indépendance des événements

Définition

A est indépendant de B si $P(A/B) = P(A)$ ou si $P(B) = 0$.

⇒ A est indépendant de B si et seulement si $P(A \cap B) = P(B)P(A)$.

⇒ Cas général: la famille $(A_k)_{k \in I}$ est dite famille d'évènements mutuellement indépendants si pour tout $J \subset I$, on a:

$$P(\cup_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Fonction de répartition

Définition

- Soit $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire une application X de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$ dans la valeur $X(\omega)$ dépend du résultat obtenu de l'expérience aléatoire.
- La loi de probabilité sur les sous ensembles de $X(\Omega)$ est appelée loi de probabilité de la v.a X .
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- On appelle la fonction de répartition de X l'application:

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ t \rightarrow P(X \leq t) \end{cases}$$

- F_X est croissante.
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$
- F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Définition

Une variable aléatoire X est dite discrète si $\sum_{t \in X(\Omega)} P(X = t) = 1$ (autrement dit si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable).

Loi d'une v.a discrète: l'ensemble des probabilités $P(X=x)$ telles que $x \in X(\Omega)$.

Exemple: soit X la v.a aléatoire correspondante au résultat de résultat du lancement d'un dé, donner la loi de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

NB. X suit la loi uniforme ($P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, $\forall 1 < i \leq n$). **Fonction de répartition**

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X \leq x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

Variable aléatoire discrète

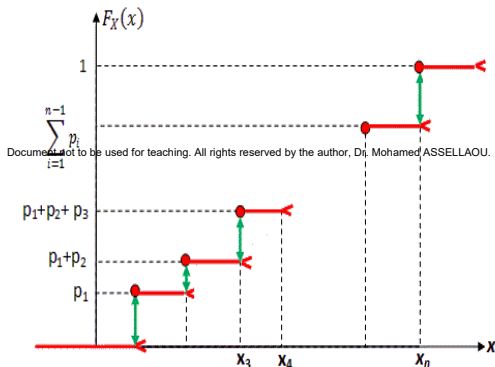
La fonction de répartition s'écrit sous la forme suivante:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < x_1 \\ p_1 & \text{if } x_1 \leq t < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{if } x_2 \leq t < x_3 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 & \text{if } x_n \leq t \end{cases}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- La fonction de répartition de la variable discrète est une fonction en escalier.

Représentation graphique de la loi d'une v.a discrète



Exercice v.a discrète

Exercice: Soit X la variable aléatoire correspondante au nombre de faces obtenues après 3 lancers d'une pièce de monnaie (non truquée). Donner le support de la variable X , sa loi de probabilité et calculer sa fonction de répartition.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Exercice: On lance une pièce plusieurs fois jusqu'à l'obtention d'une face ou 4 piles. Donner les lois des v.a discrètes suivantes:

- X : nombre de fois que la pièce est lancée
- Y : nombre de piles
- Z : nombre de faces

Variable aléatoire continue

Définition

La variable aléatoire X est dite continue si sa loi de probabilités est définie par une densité notée f_X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $t_1 \leq t_2$, on a

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

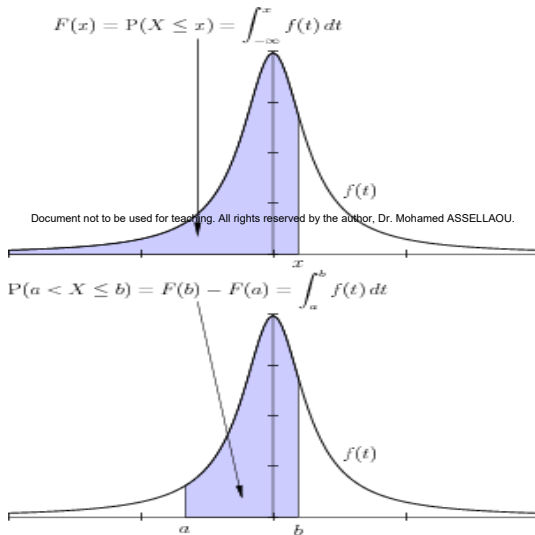
$$P(t_1 \leq X \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_X(r) dr$$

■ **Loi d'une v.a continue:** Calcul de sa densité.

■ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$

■ $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$

Représentation graphique d'une densité d'une v.a c



Exercices

- 1 **Exercice** : Soit F_X la fonction de répartition de la v.a X qui s'écrit sous la forme:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Donner la densité de la v.a continue X .

- 2 **Exercice** : Soit f_X la densité de la v.a X :

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$$

où $\lambda > 0$. Donner la densité de la v.a $Y = X^2$.

Propriétés de la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire, $a < b$ deux réels, alors:

$$P(X > a) = 1 - F_X(a)$$

$$P(X < a) = F_X(a^-)$$

$$P(X \geq a) = 1 - F_X(a^-)$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI.

$$P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$$

$$P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$$

où $F_X(a^-)$ étant la limite à gauche de la F_X en a .

Exemple d'une fonction de répartition

Soit la variable aléatoire X caractérisée par la fonction de répartition suivante:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{10} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{t^2}{5} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{9}{10} & 2 \leq t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI.

Calculer $P(X < 1)$, $P(X > 2)$, $P(X = 1)$, $P(1 < X \leq 2)$, $P(2 \leq X \leq 4)$

Espérance et variance d'un v.a discret

- Le comportement moyen d'une v.a est donnée par l'espérance E :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Exemple : Soit $X(\Omega) = \{-2, \frac{1}{2}, 6\}$, alors

$$E(X) = -2 * P(X = -2) + \frac{1}{2}P(X = \frac{1}{2}) + 6 * P(X = 6)$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- la dispersion de la variable autour de l'espérance est caractérisée par la variance donnée par:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

- X est centrée si $E(X)=0$. Elle est réduite si $Var(X)=1$.

Espérance et variance d'un v.a continue

- Le comportement moyen d'une v.a continue est donnée par l'espérance ou :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- la dispersion de la variable autour de l'espérance est caractérisée par la variance donnée par:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Propriétés de l'espérance d'une v.a d

Soient X, Y deux v.a discrètes et $a \in \mathbb{R}$

$$E(a) = a$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI.

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X) \leq E(Y) \quad \text{if} \quad X \leq Y$$

Propriétés de la variance d'une v.a.d

$$\text{Var}(X) \geq 0$$

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

où $\text{Cov}(X, Y) = E \left[(X - E(X))(Y - E(Y)) \right]$.

NB. La variable $Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$ est centrée réduite.

Covariance et corrélation

Définition (Covariance et corrélation)

La covariance et la corrélation des v.a X et Y sont données par les quantités suivantes:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

- Cas particulier de X et Y indépendantes, on a $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cor}(X, Y) = 0$;
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$, et $\text{Cor}(X, X) = 1$.
- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$.

Loi de Bernoulli

Contexte : Soit une variable aléatoire qui prend uniquement deux états (succès et échec). Par exemple:

- X : On lance une pièce et on note le résultat "Pile" comme succès et "Face" comme échec.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- Y : On lance un dé et on enregistre le résultat 4 comme succès et les autres résultats comme échec.
- ▷ Si on met succès = 1 et échec = 0, alors les deux variables X et Y sont des variables aléatoires discrètes qui suivent la loi de Bernoulli.

Loi de Bernoulli

- ▶ X est suit la loi de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
- ▶ X peut être interprétée comme l'indicatrice du succès.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELGAOUI.
- ▶ On note $X \sim \mathcal{B}_e(p)$.
- ▶ $\mathbb{E}(X) = p$ et $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.
- ▶ Si $X \sim \mathcal{B}_e(p)$ Calculer $E(X + X^2 + \dots + X^n)$.

Loi Binomiale

Contexte : On effectue n expériences indépendantes dont les deux issues sont deux états (succès ou échec).

- Soit X : la variable aléatoire discrète qui prend le nombre de succès obtenus à l'issue de ces n expériences.
- Soit p est la probabilité du succès, alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI

Loi Binomiale

- ▷ X suit la loi Binomiale si $X(\Omega) = [0; n]$ et

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \forall k \in [0; n]$$

- ▷ X peut être interprétée une répétition de n fois d'une v qui suit la loi de Bernoulli.
- ▷ On note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.
- ▷ $\mathbb{E}(X) = np$ et $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.
- ▷ Soit (X_n) une suite de v.a indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors leur somme $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Loi Binomiale

▷ **Exercice :** : Soit une urne contenant 8 boules noires et 5 boules rouges indiscernables au toucher. On procède à 10 extractions successives d'une boule, avec remise. Quelle est la loi du nombre de boules rouges obtenues ?

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

▷ **Exercice :** : Soit n expériences de Bernoulli ou le succès est p . Si on obtient k succès, quelle est la probabilité que le résultat de la première expérience est un succès.

Loi Binomiale Négative

Contexte : On considère une suite d'expériences de Bernoulli dont la probabilité de succès est p

- Soit X : la variable aléatoire qui prend le nombre d'essais jusqu'à l'obtention du succès numéro r .
- X suit la loi binomiale négative de paramètre r et p

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELAOUI.

Loi Binomiale Négative

- ▷ X suit la loi Binomiale Négative de paramètre p et r si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad \forall k \in [r; n]$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- ▷ On note $X \sim \mathcal{NB}(r, p)$
- ▷ X désigne le nombre de répétitions d'une expérience de Bernoulli nécessaires pour obtenir le succès numéro r .
- ▷ $\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$, $\text{Var}(X) = r \frac{1-p}{p^2}$.

Loi Binomiale Négative

- ▷ **Exercice:** On lance un dé successivement pendant plusieurs essais, quelle est la probabilité d'avoir la face 6 pour la 3ème fois à l'essai 8.
- ▷ **Exercice :** Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUL Si on obtient pour la 4ème fois la face 5 à la dixième expérience , quelle est la probabilité d'obtenir pour la première fois la face 5 pendant la 3ème expérience et la deuxième fois la face 5 pendant la 6ème expérience.

Solution Exercice

- $P(X = 8) = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5$
- Utiliser $P(E/A)$ où E: "avoir le premier face 5 au 3ème essai et le deuxième face 5 au 6ème essai" A: "Obtenir le 3ème face 5 au 10ème essai" On sait:

$$\begin{aligned}
 P(E/A) &= \frac{P(E \cap A)}{P(A)} \\
 &= \frac{(1-p)^2 p (1-p)^2 p (1-p)^3 p}{\binom{9}{2} p^3 (1-p)^7}
 \end{aligned}$$

must not be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Loi géométrique

Contexte : On considère une suite d'expériences de Bernoulli dont la probabilité de succès est p

- Soit X : la variable aléatoire qui prend le nombre d'essais jusqu'à l'obtention du premier succès
- X suit la loi géométrique de paramètres p
- X suit également la loi Binomiale Négative pour $r = 1$.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Loi géométrique

- ▷ X suit la loi de géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

- ▷ On note $X \sim \mathcal{G}(p)$ Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- ▷ X désigne le nombre de répétitions d'une expérience de Bernoulli nécessaires pour obtenir un succès.
- ▷ $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Loi géométrique

- **Exercice :** on lance un dé plusieurs fois jusqu'à l'obtention d'un 4.
Soit X le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le premier 4.
Calculer!

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

1 $P(X = 3)$

2 $P(X < 4)$

3 $P(X \geq 5)$

Solution Exercice

$$\mathbf{1} \quad P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 * \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{2} \quad P(X < 4) = P(X \leq 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\mathbf{3} \quad P(X \geq 5) = P(X > 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Loi de Poisson

Contexte : Supposons que le nombre d'expériences de Bernoulli effectuées est très grand n et la probabilité du succès $p \ll n$ est très petite.

- X suit la loi binomiale (notons $\lambda = np$) alors:

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!n-k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \quad \forall k \in [0; n]$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- Lorsque n est très grand, on peut écrire $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \simeq e^{-\lambda}$ et $\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \simeq 1$ et on obtient:

$$P(X = k) \simeq \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in [0; n]$$

Dans ce cas X est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

Loi de Poisson

- ▷ X suit la loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- ▷ On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
- ▷ La loi de Poisson peut être interprétée comme la loi limite d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{\lambda}{n})$
- ▷ $\mathbb{E}(X) = \lambda, \text{Var}(X) = \lambda$

Loi de Poisson

- ▷ **Exercice :** La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ . On pose

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$Y = \frac{1}{(X+1)(X+2)}$$

Calculer l'espérance de Y .

Solution Exercice

▷ On a $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ et on a :

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} (e^{\lambda} - 1 - \lambda)$$

Loi uniforme discrète

- ▷ X suit la loi uniforme sur $\{1; \dots; n\}$ si

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\forall i \in \{1; \dots; n\}, \quad P(X = i) = \frac{1}{n}$$

- ▷ On note $X \sim \mathcal{U}(\{1; \dots; n\})$
- ▷ $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$

Loi uniforme discrète

- ▷ **Exercice :** Une personne souhaitant rentrer chez elle a un trousseau de n clés. Calculer:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- 1** X: Le nombre moyen d'essais si la personne élimine la clé qui n'est pas la bonne.
- 2** Y: Le nombre moyen d'essais si la personne remet la clé qui n'est pas la bonne dans le trousseau.

Solution Exercice

- 1** X: "Le nombre d'essais pour ouvrir la porte si la personne élimine après chaque essai la fausse clé" suit la loi uniforme ($E(X) = \frac{n+1}{2}$). En effet,

$$P(X = 1) = \frac{1}{n}$$

$$P(X = 2) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

$$P(X = 3) = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

...

$$P(X = k) = \prod_{i \in [1; k-1]} \left[\frac{n-i}{n-(i-1)} \right] \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$$

où les termes en rouge représentent la probabilité d'échec pour chaque cas.

Solution Exercice

- 1** Y: "le nombre d'essais pour ouvrir la porte si la personne remet après chaque essai la fausse clé" suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{n}$ car ce qu'on cherche ici est le nombre d'essais jusqu'au premier succès qui correspond à l'ouverture de la porte donc le nombre moyen d'essais est $E(X) = \frac{1}{p} = n$.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Loi hypergéométrique

Contexte : On sélectionne sans remise n ampoules aléatoirement d'un entrepôt contenant N ampoules dont m sont défectueuses et le reste non défectueuses.

- Soit X nombre d'ampoules défectueuses. Alors:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$P(X = i) = \frac{\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \quad i \in [\max(0, n + m - N), \min(m, n)]$$

On dit alors que X est une variable qui suit la loi hypergéométrique de paramètres n , m et N

Loi hypergéométrique

- ▷ X suit la loi hypergéométrique de paramètres $(N; n; m)$ si $X(\Omega) = [\max(0, n - N - m)); \min(n, m)]$ et

$$\forall i \in [1; n], P(X = i) = \frac{\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- ▷ On note $X \sim \mathcal{H}(N, m, n)$
- ▷ Il s'agit d'une loi dont tous les poids de probabilité sont identiques.
- ▷ $\mathbb{E}(X) = n \frac{m}{N}$, $\text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$.

Loi hypergéométrique

- **Exercice:** Une entreprise vend des caméras par lot de 40. On sait que d'habitude il y a 4 caméras défectueuses dans un lot produit, calculer la probabilité que trois caméras défectueuses soient observées dans un échantillon de taille 5.

Solution

- Soit X : "Le nombre de caméras défectueuses dans un échantillon de taille 5". Alors $X \sim \mathcal{H}(40, 4, 5)$. Par conséquent,

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3} \binom{36}{2}}{\binom{40}{5}}$$

Loi uniforme continue

- ▷ X suit la loi uniforme continue sur $[a, b]$ si elle a pour densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a; b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \end{cases}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- ▷ On note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$
- ▷ $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$

Loi uniforme continue

- **Exercice:** Supposons que le temps d'arrivée au travail le matin suit la loi uniforme continue dans l'intervalle $[8h00, 9h00]$. Quelle est la probabilité qu'une personne arrive entre 8h20 et 8h40.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author - Dr. Mohamed ASSELAOUI.

Loi uniforme continue

- **Solution:** Soit X : le temps d'arrivé en minutes et Soit 8h00 l'origine du temps. Alors:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 40) &= \int_{20}^{40} f(x) dx \\ &= \int_{20}^{40} \frac{1}{60 - 0} dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Loi exponentielle

- ▷ X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle a pour densité:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- ▷ On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
- ▷ $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
- ▷ X satisfait à la relation de perte de mémoire suivante:

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \forall t \geq 0, P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

Exercice

- Un opérateur mobile souhaite recommander la meilleure offre à des clients potentiels. Si la durée moyenne (en min) des appels de ces clients suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité qu'un client passe plus de 6 minutes par appel.

Solution

- Soit X la durée moyenne des appels: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on cherche à calculer $P(X \geq 6)$. D'après la définition de la loi exponentielle, on a:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= \int_6^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_6^{+\infty} = e^{-2} \end{aligned}$$

Exercice:

- **Exercice:** Soit X la variable aléatoire discrète qui correspond au nombre de fois qu'un évènement rare surgisse dans une unité de temps s . Puisque la probabilité de l'occurrence de l'évènement rare est très petite dans une unité de temps s , on considère que X suit la loi de Poisson de paramètre λs

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI.

- 1 Quelle est la densité de la loi de la variable aléatoire Y qui correspond à la durée entre d'occurrence de l'évènement et sa prochaine occurrence.

Solution:

■ On a:

$$\begin{aligned}F_Y(s) = P(Y \leq s) &= 1 - P(Y > s) \\&= 1 - P(X = 0)\end{aligned}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{0!} = 1 - e^{-\lambda s}$$

Alors,

$$f_Y(s) = \frac{dF_Y(s)}{ds} = \lambda e^{-\lambda s}, \quad \forall s \geq 0$$

Loi normale de paramètre μ et σ

Définition (Loi normale)

On dit qu'une v.a Y suit la loi normale (i.e $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $\sigma > 0$) s'il a une densité f_Y définie par:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_Y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\triangleright \mathbb{E}(Y) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Loi normale centrée réduite

Définition (Loi normale centrée réduite)

On dit qu'une v.a X suit la loi normale centrée réduite ($X \sim \mathcal{N}(0, 1)$) si elle a une densité f_X définie par:

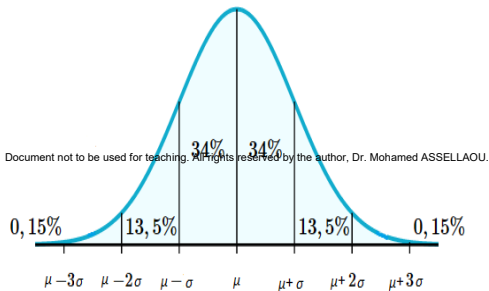
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

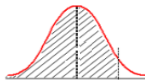
▷ $\mathbb{E}(X) = 0, \quad \text{Var}(X) = 1.$

■ $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$

Graphique de la Loi normale



- 68% des observations sont dans l'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95% des observations dans $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% des observations dans $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Table de $\mathcal{N}(0, 1)$ $P(x < u)$ 

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8314	0,8338	0,8362	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Exercice: $\mathcal{N}(0, 1)$

- Soient a et b deux réels tels que $a \geq b \geq 0$ et soit φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$. Trouver les probabilités en fonction de $\varphi(a), \varphi(b)$ sachant que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

■ $P(X > a)$

■ $P(a \leq X \leq b)$

■ $P(X \geq -a)$

■ $P(X \leq -a)$

■ $P(\leq X \leq)$

■ $P(-b \leq X \leq -a)$

■ $P(-a \leq X \leq a)$

■ $P(-a \leq X \leq b)$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Exercice: $\mathcal{N}(0, 1)$

- $P(X > a) = 1 - \varphi(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = \varphi(b) - \varphi(a)$
- $P(X \geq -a) = \varphi(a)$
- $P(X \leq -a) = 1 - \varphi(a)$
- $P(-b \leq X \leq -a) = \varphi(b) - \varphi(a)$
- $P(-a \leq X \leq a) = 2\varphi(a) - 1$
- $P(-a \leq X \leq b) = \varphi(b) + \varphi(a) - 1$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Théorème Central Limite

Théorème (Théorème Central Limite)

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ où (X_i) est une suite de v.a indépendantes de même loi d'espérance m et de variance $\sigma^2 < +\infty$ (identiquement distribuées), alors la loi de probabilité de $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ tend vers $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

■ **Convention:** Quand $n \geq 30$, on applique le théorème central limite.

Exercice

- **Exercice:** La durée de vie d'un appareil optique produit dans une usine suit la loi exponentielle de moyen 500 par unité de temps. On souhaite calculer la probabilité que la durée de vie moyenne de 100 appareils produits soit comprise entre 450 et 550

Solution:

- Soit X_i la durée de vie d'un appareil i , ($i \in [1; 100]$). $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $E(X) = 500$ alors $\mu = 500$, $\sigma = 500$ et $\lambda = \frac{1}{500}$. Soit $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$ (où $n = 100$), on souhaite calculer:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI.

$$\begin{aligned} P(450 < \bar{X} < 550) &= P\left(\frac{450 - 500}{50} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{550 - 500}{50}\right) \\ &\simeq P(-1 < Z < 1) \\ &\simeq 2\varphi(1) - 1 = 2 * 0.84 - 1 = 0.68 \end{aligned}$$